



净水技术
Water Purification Technology
ISSN 1009-0177, CN 31-1513/TQ

《净水技术》网络首发论文

题目： 基于神经网络与马尔可夫链预测地表水净化装置总氮降解的效果
作者： 李金泽，叶春，李春华，罗艳丽，吕美婷，高悝
收稿日期： 2018-01-04
网络首发日期： 2018-12-14
引用格式： 李金泽，叶春，李春华，罗艳丽，吕美婷，高悝. 基于神经网络与马尔可夫链预测地表水净化装置总氮降解的效果[J/OL]. 净水技术.
<http://kns.cnki.net/kcms/detail/31.1513.TQ.20181213.1351.002.html>



网络首发：在编辑部工作流程中，稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定，且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式（包括网络呈现版式）排版后的稿件，可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定；学术研究成果具有创新性、科学性和先进性，符合编辑部对刊文的录用要求，不存在学术不端行为及其他侵权行为；稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准，正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性，录用定稿一经发布，不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容，只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认：纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社有限公司签约，在《中国学术期刊（网络版）》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版，以单篇或整期出版形式，在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊（网络版）》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物（ISSN 2096-4188，CN 11-6037/Z），所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

基于神经网络与马尔可夫链预测地表水净化装置总氮降解的效果

李金泽^{1,2,3,4}, 叶春^{1,2,3}, 李春华^{2,3}, 罗艳丽¹, 吕美婷^{2,3}, 高悝^{2,3}

(1.新疆农业大学草业与环境科学学院, 新疆乌鲁木齐 830052; 2.湖泊水污染治理与生态修复技术国家工程实验室, 北京 100012; 3. 中国环境科学研究院, 北京 100012; 4.燕京理工学院建筑学院, 河北廊坊 065201)

摘要 通过数学模型对地表水净化装置净水水质进行预测是当下的一个热点, 由于地表水净化装置的水质变化呈现非线性、时变性与随机性。基于此, 首先采用 BP 神经网络对该装置水质预测, 通过回归分析得到的可决系数判定拟合情况良好, 误差较低。之后, 为进一步提高预测精确度, 降低 BP 预测结果随机波动带来的误差, 将马尔可夫链与 BP 神经网络结合进行分析。通过对拟合结果及误差进行状态划分, 得出状态概率矩阵, 分析结果表明, 出水的实际水质均符合最大概率区间内的预测范围值。因此, 建立神经网络与马尔可夫链的组合预测模型, 能够得到更准确的预测结果。

关键词 BP 神经网络 马尔可夫链 可决系数 状态概率矩阵 总氮降解 预测

中图分类号: TU991.2 文献标识码: A

Effect of Surface Water Purification Device on TN Degradation Based on Prediction of Neural Network and Markov Chain

Li Jinze^{1,2,3,4}, Ye Chun^{1,2,3}, Li Chunhua^{2,3}, Luo Yanli¹, Lü Meiting^{2,3}, Gao Kui^{2,3}

(1. Grassland and Environmental Science College of Xinjiang Agricultural University, Urumqi 830052, China;

2. Chinese Research Academy of Environmental Sciences, Beijing 100012, China;

3. National Engineering Laboratory for Lake Pollution Control and Ecological Restoration, Beijing 100012, China;

4. School of Architecture, Yanching Institute of Technology, Langfang 065201, China)

Abstract Mathematical model of water purifying device for surface water is predicted to be a hot spot, because of water quality changing of surface water purification device which is nonlinear, time-varying and stochastic. Based on this, BP neural network was used to predicate water quality treated by the device. Fitting coefficient obtain by regression analysis indicated that the simulation was fitted well. Then, in order to further improve prediction accuracy and reduce the error caused by random fluctuation of BP prediction results, Markov chain and BP neural network were combined to analyze. State probability matrix was obtained by states divided according to the results of simulation errors. The results showed that actual water quality of the effluent accorded with predicted range within the maximum probability interval. Therefore, a combined prediction model of neural network and Markov chain can be established to get more accurate prediction results.

Keywords BP neural network Markov chain coefficient of determination state transition probability matrix TN degradation prediction

[收稿日期] 2018-01-04

[基金项目] 国家水体污染控制与治理科技重大专项(2017ZX07203-005)

[作者简介] 李金泽(1994—), 男, 硕士, 研究方向为水污染治理与修复, E-mail: LJZ_zky@163.com。

[通信作者] 叶春(1970—), 男, 博士, 研究员, 研究方向为湖泊富营养化治理和生态恢复理论与技术, E-mail:yechbj@163.com。

[本文编辑] 阮辰昉

通过数学模型对预测水处理效果是当下的一个研究热点方向, 而在水质预测研究中, 比较常见的预测方法就是神经网络。近些年来利用神经网络预测水质方面的研究水平正在逐步提升, 陆超等^[1]通过一套具有三层神经网络结构的预测模型对污水处理工艺过程进行仿真验证, 预测出该污水处理厂 12 h 后处理水质的状况, 为该厂提供了一种可靠的预警处理水的方法。商巧巧^[2]以水质、环境、经济效益及监督管理指标作为参考, 使用改进神经网络模型对深圳市某污水处理厂运营管理进行预测和评价, 使该厂在运营管理、节能减排等角度上达到最优, 给污水处理厂相关管理人员提供了合理建议。宋韬略^[3]利用 Elman 神经网络建立曝气池的预测控制模型, 并对预测控制参数 DO 浓度和 pH 值进行建模预测控制, 均取得满意的效果, 对今后污水处理厂智能预测水质指标具有重要意义。

目前, 大多数水质预测研究主要集中在污水处理及系统上, 对于地表水净化装置运行的水质预测研究较少。地表水净化装置的净水过程具有非确定性、非线性、不易精确控制等特点, 充分利用神经网络模糊信息处理的优势^[4], 可以对地表水净化效果进行装置的水净化预测。为进一步提高预测精确度, 利用马尔可夫链对拟合结果及误差进行状态划分, 预测分析装置的实际出水水质。

1 神经网络与马尔可夫链组合模型

1.1 BP 神经网络原理

神经网络(neural network)系统是一种非线性计算处理系统^[5], 其特色在于信息的分布式存储和并行协同处理^[6], 其中 BP(back propagation)神经网络使用最为广泛。它能够学习和贮存大量的输入-输出模

式映射关系，并不用提供关系方程。它的学习规则^[7]是使用最速下降法，通过反向传播来不断调整网络权值和阈值，使网络的误差平方和最小，具体步骤如图 1 所示。

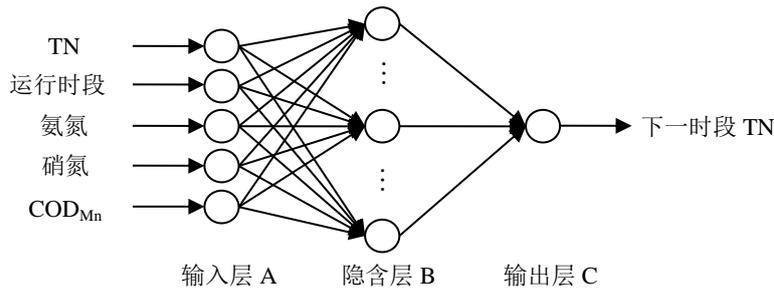


图 1 BP 神经网络模型结构
Fig.1 BP Neural Network Model Structure

本文使用的 BP 神经网络结构为 5 输入 1 输出，输入层、隐含层和输出层的单元数分别为 A 、 B 和 C ，输入量为 TN、运行时段、氨氮、硝氮、 $COD_{Mn}(x_1, x_2, \dots, x_5)$ ，输出量为 (y_1) ，隐含层层数与节点数由实际效果决定 $(h_1, h_2, h_3, \dots, h_B)$ 。图 2 为 BP 神经网络计算的 4 个基本流程。

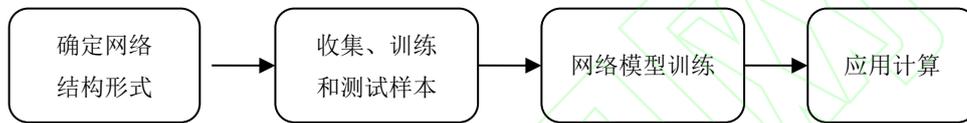


图 2 BP 神经网络算法流程
Fig.2 BP Neural Network Algorithm Flow

在网络训练阶段，权值和阈值的确定步骤最复杂。首先需要根据学习样本初始化权值和阈值，之后通过反向传播，不断修正输入层和隐含层、隐含层和输出层之间的权值和阈值，最后在误差满足一定要求时才会存储权值。虽然 BP 神经网络模型在模拟时，为保证准确性，会应用到许多样本训练和测试数据，但是这些数据受外在因素影响有时会在一定误差，这样会导致预测结果在一定范围内随机波动，降低了预测的准确性^[8]。马尔可夫链 (Markov chain) 的使用可以更好地消除由外在因素而产生的预测误差，因此，建立神经网络与马尔可夫链的组合预测模型，能够得到更准确的预测结果。

1.2 马尔可夫链原理

马尔可夫链是具有马尔可夫性质的随机变量的一个数列^[9]，通常用在排队论或其他统计学建模当中，而马尔可夫链预测法是一种适用于随机过程的科学、有效的动态预测方法^[10]。该方法主要分两个过程：一是确定马尔可夫链的状态空间，二是要通过计算确定状态转移概率与状态转移矩阵^[11]。

在事件发展变化过程中，在状态 i 的过程下一步转移到状态 j 的概率，简称状态转移概率，如式 (1)。

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} \quad (1)$$

其中： p_{ij} 为状态转移概率； $X_n = i$ 表示过程在时刻 n 处于状态 i ，称 $\{0, 1, 2, \dots\}$ 为该过程的状态空间，记为 S ， S 为状态空间的总称。对马尔可夫链，给定过去的状态 X_0, X_1, \dots, X_{n-1} 及现在的状态 X_n 。

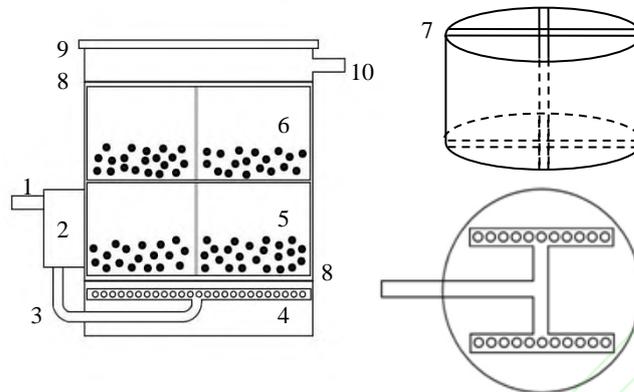
通过马尔可夫链模型可以分析 BP 神经网络模拟预测结果误差的波动范围，并且预测波动的发展趋势，通过误差的状态转移概率矩阵对 BP 神经网络预测的结果进行进一步的精细优化。

马尔可夫链具备所谓的“无后效性”^[12]，即要确定该过程 t_{n+1} 时刻的状态，只需知道 t_n 时刻的情况即可，并不需要对 t_1, t_2, \dots, t_{n-1} 时刻的状况完整了解。而在装置净水过程中，下一时刻水质情况只与上一个时刻有关，与之前的状态无关，故应用此预测方法对 t_n 时刻的水质进行预测十分有效。此外，该模型的最终预测结果不是一个具体数值，而是生成一组不同概率的预测区间值，该方法可从一定程度上减少因具体数值造成的误差，提高预测准确度。

2. 地表水净化装置

2.1 试验装置

本试验装置为自主研制，共分为进水区、布水区、净水区、排水区四部分，如图3所示。净水区由微生物填料微球仓和微生物营养补充仓组成。微生物填料微球仓内为自制活性陶粒，微生物营养调节微球仓内为自制微生物营养缓释微球。该装置采用下部进水，上部出水的方式自下而上运动，泵体通电后，使填料于设备内不断旋转搅动，加快区域水循环，不仅可以增加水中溶解氧浓度，还可以通过培养土著微生物，达到水体净化的目的。



注：1-进水口；2-进水泵；3-导管；4-均布排水管；5-微生物填料微球仓；6-微生物营养补充仓；7-十字固定架；8-透水多孔板；9-桶盖；10-出水口

图3 地表水净化装置平面示意图
Fig.3 Schematic Diagram of Surface Water Purification Equipment

2.2 运行方案

装置运行前于微球仓装入部分自制活性陶粒，于补充仓装入部分自制微生物营养缓释微球，填料安装完毕后，拧紧上部盖子。将装置放在某大院池塘中心，固定设备于池塘底部并通电。根据池塘面积和形状，合理布设5个采样点，定期采集水样。

水样的采集主要分为装置运行前和运行后，监测指标为 TN、氨氮、硝氮、 COD_{Mn} 等。装置运行前，采集第一次水样，装置运行后，每过 3 d 一次，3 次后每隔 7 d 一次，取当天 9 时的水样进行水质指标检测，当场记录。此外，将每次装置运行前的水样作为原水记录。

3.装置脱氮效果模拟预测分析

3.1 基于 BP 神经网络的装置脱氮效果分析

通过实地监测，得到 2016 年 10 个不同时间段的某大院池塘 TN、氨氮、硝氮、 COD_{Mn} 等指标的数据。为保证数据训练及检验的准确性，取每天某一监测指标的 5 个采样点的数值进行平均求解，分别作为每天这一指标的数值，其他 4 个指标按照同样方法求解。并以时间段从小到大为顺序，将净水时间、原水 TN、氨氮、硝氮、 COD_{Mn} 、净化后的 TN 共 5 个指标平均值的数据进行整理，如表 1 所示。

表 1 市政府池塘各指标监测平均值
Tab.1 Average Values of Indexes of Pond Water

序号	采样时间/d	$TN_{in}/(mg \cdot L^{-1})$	氨氮 _{in} /($mg \cdot L^{-1}$)	硝氮 _{in} /($mg \cdot L^{-1}$)	$(COD_{Mn})_{in}/(mg \cdot L^{-1})$	$TN_{out}/(mg \cdot L^{-1})$
1	3	1.766	0.311	0.103	6.01	1.653
2	6	1.814	0.367	0.144	6.06	1.583
3	9	1.791	0.345	0.125	6.04	1.465
4	16	1.843	0.390	0.160	6.00	1.436
5	23	1.864	0.406	0.171	6.10	1.378
6	30	1.769	0.307	0.112	6.02	1.237
7	37	1.905	0.442	0.201	6.14	1.327
8	42	1.813	0.374	0.142	6.06	1.200
9	49	1.927	0.457	0.209	6.17	1.288
10	56	1.872	0.415	0.178	6.11	1.212

调试好程序各参数后，将 2016 年的水质指标数据输入 MATLAB 软件中，以表 1 中序号 1~8 的 5 个采样点的平均值共 8 组数据进行 BP 神经网络训练，再将其 5 个采样点的值共 40 组数据进行辅助训练，测试 9 组和 10 组净化后的 TN 值的预测与实际情况，通过回归对可决系数进行求解，判定拟合优度良好，可以

进行预测分析。随后，以序号 1~10 所有样本共 60 组作为训练集，对 2017 年 5 月 4 日~7 月 12 日的监测数据进行模拟预测，得出出水 TN 的 BP 神经网络预测值与实际值的对比情况，结果如表 2 所示。

表 2 装置实际 TN 值及 BP 神经网络计算拟合值
Tab.2 Actual and Calculated Fitting Value of Effluent TN

日期	实际值/(mg · L ⁻¹)	BP 拟合值/(mg · L ⁻¹)	绝对误差	相对误差
5 月 4 日	1.792	1.869	0.077	4.12%
5 月 7 日	1.726	1.792	0.066	3.68%
5 月 10 日	1.688	1.738	0.050	2.88%
5 月 17 日	1.633	1.683	0.050	2.97%
5 月 24 日	1.564	1.616	0.052	3.22%
5 月 31 日	1.492	1.584	0.092	5.81%
6 月 7 日	1.478	1.503	0.025	1.66%
6 月 14 日	1.434	1.431	-0.003	-0.21%
6 月 21 日	1.385	1.373	-0.012	-0.87%
6 月 28 日	1.353	1.316	-0.047	-3.60%
7 月 5 日	1.316	1.252	-0.064	-5.11%
7 月 12 日	1.289	1.241	-0.068	-5.57%

由表 2 可知，数据模拟误差范围为±10%，有 5 次模拟结果低于实际值，7 次高于实际值。其中，最小误差为 0.21%，最大误差为 5.81%。表明出水的实际 TN 与预测 TN 误差均在一定范围内，均符合预测范围值，可应用于该装置水净化的后续水质预测中。

3.2 基于 BP 神经网络的装置脱氮预测

3.2.1 马尔可夫状态区域划及转移概率矩阵

马尔科夫链的预测精度主要由转移矩阵决定，为了构造转移矩阵，首先需要合理划分误差状态区间，一般以样本减均方差的方法来确定^[13]。

(1) 以样本均值 \bar{x} 为中心，标准差 s 为标准，一般将数据序列分为 $(\bar{x}-s, \bar{x}-0.5s)$ 、 $(\bar{x}-0.5s, \bar{x})$ 、 $(\bar{x}, \bar{x}+0.5s)$ 、 $(\bar{x}+0.5s, \bar{x}+s)$ 等几组。通过表 2 得到计算误差平均值为 $x=0.75$ ，标准差为 $s=3.80$ 。由于 BP 拟合相对实际值误差在 -5.57%~5.81%，故将马尔科夫状态区域划分为 4 种状态： $a[-10\%, -5\%]$ ， $b[-5\%, 0]$ ， $c[0, 5\%]$ ， $d[5\%, 10\%]$ 。

(2) 确定转移概率矩阵。当 $k=1$ 时，称 $p_{ij}(1)$ 为 1 步转移概率，设 P 表示一步转移概率 $p_{ij}(k)$ 所组成的矩阵，称 P 为系统状态的一步转移概率矩阵^[14]，如式 (2)。

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n1} & \cdots & P_{nm} \end{bmatrix} \quad (2)$$

根据之前 4 种区域状态划分设定，表达式如式 (3)。

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = p_i(i, j=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

那么由状态 i 转向状态 j 的转移概率为 $f_{ij} \approx p_{ij} / p_i$ ， $(i=1, 2, \dots, n)$ ，可得到 BP 模拟出水 TN 误差的一步转移概率矩阵，如表 3 所示， P 的表达式可进一步表现为式 (4)。

表 3 装置出水水质预测结果的马尔可夫状态转移表
Tab.3 Markov State Transition for BP Forecasted Results of Surface Water Quality Data

状态	a	b	c	d	合计
a	1	0	0	0	1
b	1	2	0	0	3
c	0	1	4	1	6
d	0	0	1	0	1
合计	2	3	5	1	11

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0.67 & 0 & 0 \\ 0 & 0.17 & 0.67 & 0.17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

3.2.2 马尔可夫性检验及总氮预测

检验该装置净水水质是否具有马氏性是应用马尔科夫链模型的必要前提，故采用 χ^2 统计量进行检验。设其指标值序列包含 q 个可能的状态，用 f_{ij} 表示指标序列 x_1, x_2, \dots, x_n 中从状态 i 经过一步转移到状态 j 的频数， $i, j \in S$ 。将转移频数矩阵的第 j 列之和除以各行各列总和所得的值称边缘概率，即

$$p_j = \frac{\sum_{i=1}^q f_{ij}}{\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q f_{ij}}。则统计量 \chi^2 = 2 \sum_{i,j} f_{ij} \left| \log \frac{p_{ij}}{p_j} \right|，以自由度为 (q-1)^2 的 \chi^2 分布为极限分布，其中 p_{ij} = f_{ij} / \sum_{j=1}^q f_{ij}。$$

且给定显著性水平 α ，若 $\chi^2 > \chi_{\alpha}^2((q-1)^2)$ ，则认为 $\{x_i\}$ 符合马氏性，否则该序列不可作为马尔科夫链来处理 [15]。

对该装置 2017 年 5 月至 7 月的状态序列做马氏检验，根据表 3 再结合步长为 1 的一步转移概率矩阵 P ，可算得统计量 $\chi^2 = 28.39$ ，给定置信度 $\alpha = 0.05$ ，查 F 分布临界值表可得 $\chi_{\alpha}^2((q-1)^2) = 16.9$ ，由于 $\chi^2 > \chi_{\alpha}^2((q-1)^2)$ ，故这组序列满足马氏性。

根据该装置 2017 年 5 月 4 日~7 月 12 日的模拟结果，通过马尔科夫链预测模型，得到 7 月 19 日至 8 月 16 日净水后总氮状态转移表，结果如表 4 所示。其中，参考 2017 年 7 月 12 日的模拟误差，初始向量为 $[0,0,1,0]$ 。

表 4 2017 年 5 月 4 日~7 月 12 日净水 TN 预测状态向量
Tab.4 Forecasting State Vectors of TN during May 4 to July 12 in 2017

状态	净水 TN 预测状态向量				
	7 月 19 日	7 月 26 日	8 月 2 日	8 月 9 日	8 月 16 日
a	0	0	0.06	0.13	0.21
b	0	0.17	0.22	0.25	0.26
c	1	0.66	0.61	0.52	0.45
d	0	0.17	0.11	0.10	0.08

根据 2017 年 7 月 19 日~8 月 16 日净水后总氮状态转移表改进后的最终预测结果，如表 5 所示。马尔可夫链改进后的预测结果并不是具体数值，而是不同概率下的范围值，符合检测结果在一定程度呈随机变化的特性，通过最大概率区间预测值可以很准确地预测实际净水水质范围。

表 5 2017 年 5 月 4 日~7 月 12 日净水实际值、BP 拟合值与马尔可夫改进值对比情况
Tab.5 Actual, Calculated Fitting and Markov Chain Improved Value of Effluent TN during May 4 to July 12 in 2017

时间	实际值	BP 拟合值	改进后预测结果	概率
7 月 19 日	1.263	1.251	[1.389, 1.326]	0
			[1.326, 1.263]	0
			[1.263, 1.200]	1
			[1.200, 1.137]	0
			[1.359, 1.297]	0
7 月 26 日	1.235	1.204	[1.297, 1.235]	0.17
			[1.235, 1.173]	0.66
			[1.173, 1.112]	0.17
			[1.332, 1.272]	0.06
			[1.272, 1.211]	0.22
8 月 2 日	1.211	1.203	[1.211, 1.150]	0.61
			[1.150, 1.090]	0.11
			[1.305, 1.245]	0.13
			[1.245, 1.186]	0.25
			[1.186, 1.127]	0.52
8 月 9 日	1.186	1.169	[1.127, 1.067]	0.10
			[1.278, 1.225]	0.21
			[1.225, 1.162]	0.26
			[1.162, 1.104]	0.45
			[1.104, 1.046]	0.08

从装置 2017 年 7 月 19 日~8 月 16 日的脱氮模拟预测结果可知, 出水的实际水质均符合最大概率区间内的预测范围值, 表明基于 BP 神经网络与马尔可夫链的组合预测模型具有较高的精度, 可应用于该装置净化水质的预测。

4 结论

本文所采用的组合预测模型改变了传统以往的水净化数学模型的使用, 通过基于 BP 神经网络的预测模型, 充分挖掘出数据中的变化规律与拟合趋势, 可以在不掌握生物反应机理模型参数或缺乏数据的情况下进行预测。通过对该试验装置运行得到的实际数据分析计算表明, BP 神经网络模型针对该装置具有很好的适用性, 能够在一定误差范围内预测水净化后的 TN 范围。但是, 由于该装置在净水过程存在一定波动范围的误差, 故将 BP 神经网络模型与马尔可夫链组合, 可以恰好弥补了传统数学模型在净水过程中的不足, 这为今后其它指标的预测以及多个时间段的预测提供了借鉴。

参考文献

- [1] 陆超, 张峻, 赵俊. 基于神经网络的污水处理厂水质预测模型[J]. 净水技术, 2013, 32(4): 100-105.
- [2] 商巧巧. 城市污水处理厂神经网络运营模型的构建与应用[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2015.
- [3] 宋韬略. 基于神经网络的污水处理预测控制模型研究[D]. 大庆: 东北石油大学, 2014.
- [4] KULKARNI P, CHELLAM S. Disinfection by-product formation following chlorination of drinking water: Artificial neural network models and changes in speciation with treatment[J]. *Science of the Total Environment*, 2010, 408(19): 4202-4210.
- [5] LI Q, YANG J, HE L, et al. Reduced-reference video quality assessment based on BP neural network model for packet networks[J]. *Energy Procedia*, 2011, 13: 8056-8062.
- [6] 章毅, 郭泉, 王建勇. 大数据分析的神经网络方法[J]. *工程科学与技术*, 2017, 49(1): 9-18.
- [7] HAN H, LI Y, QIAO J. A fuzzy neural network approach for online fault detection in waste water treatment process [J]. *Computers & Electrical Engineering*, 2014, 40(7): 2216-2226.
- [8] WANG Z Q, ZHAO C. Study on the fuzzy neural network control used in wastewater treatment[J]. *Techniques & Equipment for Environmental Pollution Control*, 2006, 71-78(s2): 3127-3132.
- [9] CEREN C, GUL E, CANDAN G. Prediction of earthquake hazard by hidden Markov model (around Bilecik, NW Turkey)[J]. *Central European Journal of Geosciences*, 2014, 6(3): 403-414.
- [10] 夏乐天, 朱元牲. 马尔可夫链预测方法的统计试验研究[J]. *水利学报*, 2007(s1): 372-378.
- [11] 齐甦, 周德军, 王立英, 等. 基于灰色-马尔可夫链的隧道围岩变形预测研究[J]. *现代隧道技术*, 2013, 50(1): 80-86.
- [12] VERGNE N. Drifting Markov models with polynomial drift and applications to DNA sequences[J]. *Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology*, 2011, 7(1): article6.
- [13] YU X, SUN S. HMM-DM: Identifying differentially methylated regions using a hidden Markov model[J]. *Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology*, 2016, 15(1): 69-81.
- [14] 周西平, 张亚蓉. 基于马尔可夫链的网络涉警舆情热度趋势分析[J]. *现代传播(中国传媒大学学报)*, 2017, 39(12): 53-57.
- [15] 张玉芬, 朱雅琳. 马尔可夫性及其检验方法研究[J]. *价值工程*, 2012, 31(2): 312-313.